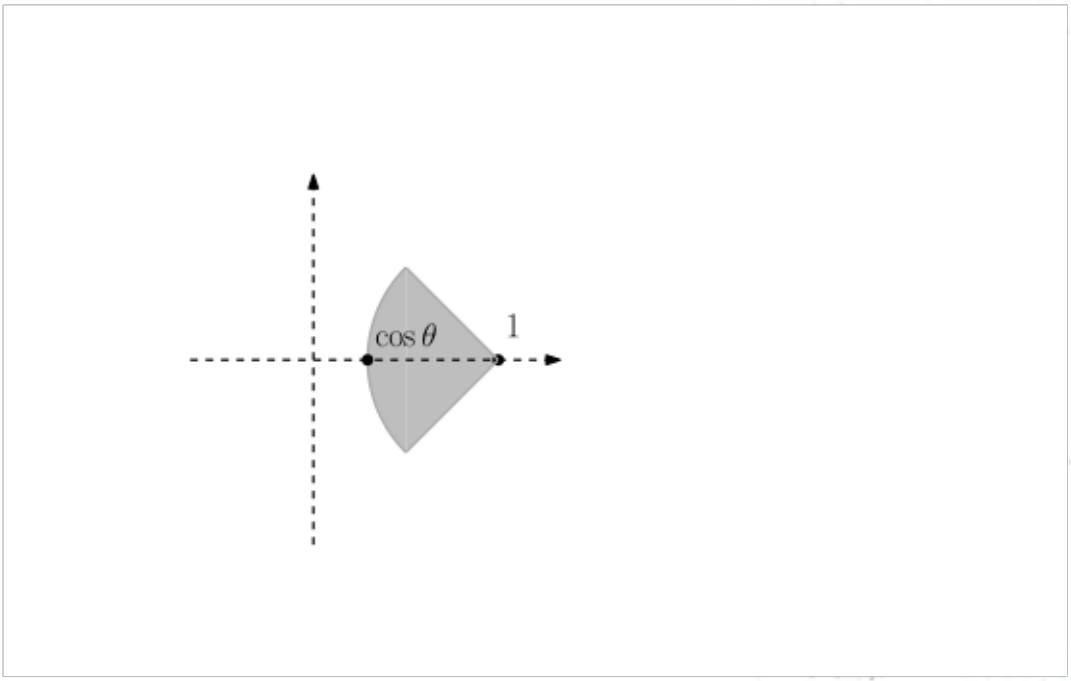
Mob 2 /

Exo II

Soit $0 < \vartheta < \pi/2$,

$$\Delta_\vartheta = \{ z \in B(0,1) \mid \exists\, 0 < \rho < \cos\vartheta,\ \exists\, \varphi \in [-\vartheta, \vartheta],\ z = 1 - \rho e^{i\varphi} \}$$

1]



2] Commençons par l'inégalité de l'indice:

Dans $B(0,1)$, $|z| < 1$

$$\Rightarrow 1 + |z| < 2$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{2}{1+|z|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-|z|} < \frac{2}{(1-|z|)(1+|z|)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-|z|} < \frac{2}{1-|z|^2}$$

On a $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$

$\Rightarrow \rho e^{i\varphi} = 1 - z$

$\Rightarrow |1 - z| = \rho$

avec l'inég précédente, on a

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2\rho}{1-|z|^2}$$

maintenant

$$1 - |z|^2 = 1 - ((1-\rho\cos\varphi)^2 + \rho^2 \sin^2\varphi)$$
$$= 1 - (1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2 \blacksquare)$$
$$= 2\rho\cos\varphi - \rho^2$$

et donc

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq \frac{2\rho}{1-|z|^2} = \frac{2}{2\cos\varphi - \rho} \leq \frac{2}{2\cos\theta - \rho} \quad (\cos\varphi > \cos\theta)$$

et comme $\rho < \cos\theta$, on a $\hookrightarrow \leq \frac{2}{\cos\theta}$